**Teorema da Incompletude de Gödel**

**Otavio A. Alves Silva¹**

**Faculdade de Engenharia da Computação**

**Instituto de Tecnologia – Universidade Federal do Pará**

tavioalves@gmail.com

***Resumo***. *Este meta-artigo tem como objetivo apresentar o teorema da incompletude de Gödel, assim como seu contexto histórico, o primeiro teorema, o segundo teorema e suas limitações.*

***Abstract.*** *This meta-article aims to present the incompleteness theorem of Gödel, as well as its historical context, the first theorem, the second theorem, and its limitations.*

**1. Introdução**

Em 1931, Kurt Gödel desferiu um golpe devastador nos matemáticos de sua época. Esse jovem matemático fez uma descoberta-marco, tão poderosa quanto qualquer coisa que Albert Einstein desenvolveu. A descoberta de Gödel não se aplica somente à matemática, mas literalmente a todos os ramos da ciência, lógica e conhecimento humano. Ela tem verdadeiramente implicações que abalam a Terra. Vamos percorrer por sua teoria e verificar o quão importante ela foi para a época e continua sendo nos dias de hoje.

**2. Contexto histórico**

No fim do século XIX a [filosofia do conhecimento](https://pt.wikipedia.org/wiki/Epistemologia) era considerada um bloco monolítico e muitos intelectuais da época consideravam que haveria pouca coisa fundamentalmente nova a ser descoberta. No [Congresso Internacional de Matemática de Paris](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Congresso_Internacional_de_Matem%C3%A1tica_de_Paris&action=edit&redlink=1), em 1900, o jovem e genial [David Hilbert](https://pt.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert), imbuído das ideias correntes, apresentou um surpreendente trabalho resumindo as [23 questões](https://pt.wikipedia.org/wiki/Problemas_de_Hilbert) ainda "em aberto", as quais, após resolvidas, completariam todo o escopo da matemática.

Hilbert pretendia como de fato foi parcialmente conseguido, desencadear um esforço geral da comunidade científica a fim de completar a fundamentação lógica da matemática. Nos poucos anos que se seguiram a maior parte das questões por ele propostas foram adequadamente resolvidas.

Em 1931, quando ainda vigorava a proposta de Hilbert de obter a completa construção da teoria matemática através da lógica formal, [Gödel](https://pt.wikipedia.org/wiki/Kurt_G%C3%B6del) publicou o seu trabalho "Sobre as Proposições Indecidíveis", pondo fim a essa expectativa. Na [Universidade de Princeton](https://pt.wikipedia.org/wiki/Universidade_de_Princeton), o prestigiado [Neumann](https://pt.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann), que trabalhava com afinco na proposta de Hilbert, imediatamente mergulhou nos trabalhos de Gödel, dando-lhe grande apoio.

**3. Primeiro Teorema**

O primeiro teorema da incompletude de Gödel apareceu primeiro em 1931 como “Teorema VI” no artigo de Gödel chamado *On Formally Undecidable Propositions in Principia Mathematica and Related Systems I*.

O teorema formal é escrito em linguagem bastante técnica. Pode ser parafraseado em português como:

|  |
| --- |
| *“Qualquer teoria efetivamente gerada capaz de expressar a aritmética elementar não pode ser tanto consistente quanto completa. Em particular, para qualquer teoria formal consistente e efetivamente gerada que prova certa verdade da aritmética básica, existe uma afirmação aritmética que é verdade, mas não demonstrável na teoria (Kleene 1967, p 250).”* |

A verdadeira mas indemonstrável afirmação referida pelo teorema é, às vezes, referida como “sentença de Gödel” para a teoria. A prova constrói uma sentença específica de Gödel para cada teoria efetivamente gerada, porém há infinitas afirmações na linguagem da teoria que compartilha a propriedade de ser verdade mas indemonstrável. Por exemplo, a conjunção entre uma sentença de Gödel e qualquer sentença [logicamente válida](https://pt.wikipedia.org/wiki/Validade) terá essa propriedade.

Para cada teoria formal consistente *T* que possui uma pequena quantidade necessária da teoria dos números, a sentença de Gödel *G* correspondente afirma: “*G* não pode ser provada dentro da teoria *T*”. Essa interpretação de *G* nos leva à seguinte análise informal: se *G* fosse demonstrável sob os axiomas e regras de inferência de *T*, então *T* teria um teorema, *G*, que efetivamente se contradiz, e então a teoria *T* seria inconsistente. Isto significa que se a teoria *T* é consistente, então *G* não pode ser provada dentro dela, e assim a teoria *T* é incompleta. Além disso, a alegação que *G* faz sobre sua própria indemonstrabilidade é correta. Nesse sentido, *G* não é somente indemonstrável como também é verdadeira, e a “demonstrabilidade dentro da teoria *T*” não é o mesmo que verdade. Essa análise informal pode ser formalizada para fazer uma prova rigorosa do teorema da incompletude. A prova formal revela exatamente a hipótese necessária para a hipótese *T* para que a natureza contraditória de *G* nos leve a uma genuína contradição.

Cada teoria efetivamente gerada tem sua própria sentença de Gödel. É possível definir uma teoria *T’* maior que contém *T* inteira mais *G* como um axioma adicional. Isto não resultará numa teoria completa, porque o teorema de Gödel também se aplicará a *T’*, e assim T’ não pode ser completa. Nesse caso, *G* é um teorema em *T’*, porque é um axioma. Como *G* somente afirma que não é provável em *T*, nenhuma contradição é apresentada por sua indemonstrabilidade em *T’*. No entanto, como o teorema da incompletude se aplica a T’, existirá uma nova afirmação de Gödel, *G’*, para *T’*, mostrando que *T’* também é incompleta. *G’* se diferenciará de *G*, pois se referirá a *T’* e não, a *T*.

Para provar o primeiro teorema da incompletude, Gödel representou as afirmações por números. Então a teoria em mãos, que se supõe provar certos fatos sobre números, também prova fatos sobre suas próprias afirmações, visto que é efetivamente gerada. Questões sobre a indemonstrabilidade das afirmações são representadas como questões sobre as propriedades de números, que poderiam ser decidiveis pela teoria se ela fosse completa. Nesses termos, a sentença de Gödel afirma que nenhum número natural existe com certa propriedade. Um número com essa propriedade codificaria uma prova da inconsistência da teoria. Se existisse tal número, então a teoria seria inconsistente, ao contrário da hipótese da consistência. Então, assumindo que a teoria é consistente, não existe esse número.

**4. Segundo Teorema**

O segundo teorema da incompletude de Gödel apareceu primeiro em 1931 como “Teorema XI” no artigo de Gödel chamado *On Formally Undecidable Propositions in Principia Mathematica and Related Systems I*.

Como com o primeiro teorema, Gödel escreveu em linguagem matemática muito técnica, podendo ser parafraseada:

|  |
| --- |
| *“Para qualquer teoria formal efetivamente gerada T, incluindo verdades da aritmética básica e também certas verdades de demonstrabilidades formais, se T inclui afirmações de sua própria consistência, então é inconsistente.”* |

Isso fortalece o primeiro teorema da incompletude, porque a afirmação construída nele não expressa diretamente a consistência da teoria. A prova do segundo teorema é obtida pela formalização da prova do primeiro teorema da incompletude dentro da própria teoria.

Uma sutileza técnica do segundo teorema da incompletude é como expressar a consistência de *T* como uma fórmula na linguagem de *T*. Há muitas formas de fazer isso, e nem todas elas levam ao mesmo resultado. Em particular, diferentes formalizações da alegação de que *T* é consistente pode não ser equivalente a *T*, e algumas podem até ser provadas. Por exemplo, a [aritmética de primeira ordem de Peano](https://pt.wikipedia.org/wiki/Aritm%C3%A9tica_de_Peano) (PA) pode provar que o maior [subconjunto](https://pt.wikipedia.org/wiki/Subconjunto) de PA é consistente. Mas como PA é consistente, o maior subconjunto consistente de PA é PA, então, nesse sentido, PA “prova que é consistente”. O que PA não prova é que o maior subconjunto consistente de PA é, de fato, todo o PA. (O termo “maior subconjunto consistente de PA” é tecnicamente ambíguo, mas o que quer dizer é que o maior segmento inicial e consistente dos axiomas de PA, ordenados seguindo um critério específico; i.e., por “números de Gödel”, os números codificados pelo axioma como usados por Gödel, mencionado acima).

Para a aritmética de Peano, ou qualquer teoria axiomática familiar *T*, é possível definir canonicamente a fórmula Con(*T*) expressando a consistência de *T*; essa fórmula expressa a propriedade de que “não há um número natural codificando a sequência de fórmulas tal que cada fórmula é ou uma axioma de *T*, ou um axioma lógico ou uma consequência imediata das fórmulas anteriores de acordo com as regras de inferência da lógica de primeira ordem, e tal que a última fórmula seja uma contradição”.

A formalização de Con(*T*) depende de dois fatores: formalizar a noção de a sentença ser derivável de um conjunto de sentenças e formalizar a noção de uma axioma de *T*. A formalização de derivabilidade pode ser feita de modo canônico: dada uma fórmula aritmética A(*x*) definindo um conjunto de axiomas, pode ser formado um predicado ProvA(*P*) que expressa que *P* é demonstrável a partir do conjunto de axiomas definido por A(*x*).

Além disso, a prova padrão do segundo teorema da incompletude assume que ProvA(*P*) satisfaz a condição de demonstrabilidade de Hilbert-Bernays. Fazendo #(*P*) representar o número de Gödel da fórmula *P*, a condição de derivabilidade diz:

Se *T* prova *P*, então *T* prova ProvA(#(*P*)).

*T* prova 1.; isto é, *T* prova que se *T* prova *P*, então *T* prova ProvA(#(*P*)). Em outras palavras, *T* prova que ProvA(#(*P*)) implica em ProvA(#(ProvA(#(*P*)))).

*T* prova que se *T* prova que (*P* → *Q*) e *T* prova *P* então *T* prova *Q*. Em outras palavras, *T* prova que ProvA(#(*P* → *Q*)) e ProvA(#(*P*)) implica em ProvA(#(*Q*)).

**5. Limitações**

As conclusões dos teoremas de Gödel só são provadas para as teorias formais que satisfazem as hipóteses necessárias. Nem todos os sistemas axiomáticos satisfazem essas hipóteses, mesmo quando esses sistemas têm modelos que incluem os números naturais como um subconjunto. Por exemplo, existem axiomatizações de primeira ordem da [geometria de Euclides](https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_euclidiana), de [corpo real fechado](https://pt.wikipedia.org/wiki/Corpo_real_fechado), e da aritmética na qual a multiplicação não é *demonstravelmente* total; nenhum desses atende às hipóteses dos teoremas de Gödel. O ponto chave é que essas axiomatizações não são expressivas o suficiente para definir o conjunto dos números naturais ou para desenvolver propriedades para eles. Em relação ao terceiro exemplo, Dan Willard (2001) estudou muitos sistemas fracos da aritmética que não satisfazem as hipóteses do segundo teorema da incompletude, e que são consistentes e capazes de provar sua própria consistência (veja [teorias auto-verificáveis](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorias_auto-verific%C3%A1veis&action=edit&redlink=1)).

Os teoremas de Gödel apenas se aplicam a teorias efetivamente geradas (que são recursivamente enumeráveis). Se todas as afirmações verdadeiras sobre os números naturais forem tomados como axiomas para uma teoria, então esta teoria é consistente, uma extensão completa da aritmética de Peano (chamada de aritmética verdadeira) para o qual nenhum dos teoremas de Gödel se aplica significativamente, porque essa teoria não é [recursivamente enumerável](https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjuntos_recursivamente_enumer%C3%A1veis).

O segundo teorema da incompletude apenas mostra que a consistência de certas teorias não pode ser provada a partir de axiomas dessas próprias teorias. Ele não mostra que a consistência não pode ser provada a partir de outros axiomas (consistentes). Por exemplo, a consistência da [aritmética de Peano](https://pt.wikipedia.org/wiki/Aritm%C3%A9tica_de_Peano) pode ser provada na teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel ([ZFC](https://pt.wikipedia.org/wiki/ZFC)), ou nas teorias aritméticas aumentadas com [indução transfinita](https://pt.wikipedia.org/wiki/Indu%C3%A7%C3%A3o_transfinita), como na prova de consistência de Gentzen.

**6. Conclusão**

Após o estudo do teorema da incompletude de podemos perceber o quão impactante foi a criação desse teorema para a comunidade cientifica, mostrando que de forma mais casual “há sempre mais coisas que são verdadeiras do que podemos provar”.

**7. Referências**

Teorema da Incompletude de Godel - https://pt.wikipedia.org/wiki/Teoremas\_da\_incompletude\_de\_G%C3%B6del#Primeiro\_teorema\_da\_incompletude

Estudo sobre a Incompletude de Godel - http://cosmicfingerprints.com/o-teorema-da-incompletude-de-godel-a-descoberta-matematica-n%C2%BA-1-do-seculo-xx/